Eine neue Methode Integralgrössen zu bestimmen*

Leonhard Euler

§1 Nachdem mir des Öfteren Differentialformeln begegnet waren, welche durch den Logarithmus der variablen Größen geteilt waren, wie zum Beispiel $\frac{Pdz}{\log z}$, war es mir nicht möglich auszumachen, zu welcher Gattung von Größen deren Integrale zu zählen sind, ja es schien sogar höchst schwierig, deren Werte zumindest näherungsweise anzugeben. Was freilich die einfachste Formel dieser Art $\int \frac{dz}{\log z}$ betrifft, ist leicht klar, wenn ich sie auffasse so integriert zu werden, dass sie für $z = 0$ gesetzt verschwindet, dann aber $z = 1$ gesetzt wird, dass die Größe dann als unendlich groß hervorgehen wird; wenn nämlich die Variable z nun sehr nahe an die Einheit herankommt, dass $z = 1 - u$ ist, während u eine unendlich kleine Größe ist, dann wird wegen

$$dz = -du \quad \text{und} \quad \log z = \log(1-u) = -u$$

diese Formel $\int \frac{du}{u}$ sein, deren Wert natürlich unendlich wird. Aber es sind dennoch Integralformeln von dieser Art $\int \frac{Pdz}{\log z}$ gegeben, die, auch wenn $z = 1$ gesetzt wird, dennoch Werte von endlicher Größe annehmen; das bestimmt zu haben scheint umso mehr der Mühe wert zu sein, weil bisher kein Weg bekannt ist diese Werte ausfindig zu machen.

*Originaltitel: "Nova methodus quantitates integrales determinandi", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 19* (1775, verfasst 1774): pp. 66–102, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 17, pp. 421 – 457, Eneström-Nummer E464, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Wir wollen eines Beispiels wegen diese hinreichend einfache Formel

$$\int \frac{(z-1)dz}{\log z}$$

betrachten, welche nach dem erwähnten Gesetz integriert leicht gezeigt werden kann einen endlichen Wert zu haben. Denn für

$$\frac{z-1}{\log z} = y$$

gesetzt, dass unsere Formel $\int ydz$ wird und daher die Fläche der Kurve ausdrückt, die für die Abszisse z die Ordinate $= y$ hat, wird diese Fläche von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt natürlich einen endlichen Wert nicht viel größer als $\frac{1}{2}$ darstellen; denn, nachdem die Abszisse $z = 0$ gesetzt worden ist, wird auch die Ordinate $y = 0$ werden, aber für $z = 1$ genommen verschwindet für die Ordinate $y = \frac{z-1}{\log z}$ so der Zähler wie Nenner, also wird, nachdem an deren Stelle ihre Differentiale eingesetzt worden sind, $y = z = 1$ werden. Für die dazwischen liegenden Abszissen wollen aber $z = e^{-n}$ setzen, während e die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist; es wird

$$y = \frac{e^{-n}-1}{-n} = \frac{e^n - 1}{ne^n}$$

sein, welche Ordinate, wenn n eine sehr große Zahl war, dass die Abszisse z sehr klein wird, näherungsweise $y = \frac{1}{n}$ sein wird; dieser Wert wird also um vieles größer sein als die Ordinate z; die Form dieser Kurve wird natürlich der beigefügten Figur ähnlich sein, wo AP (Fig. 1)[1] die Abszisse z und PM die Ordinate y bezeichnet;

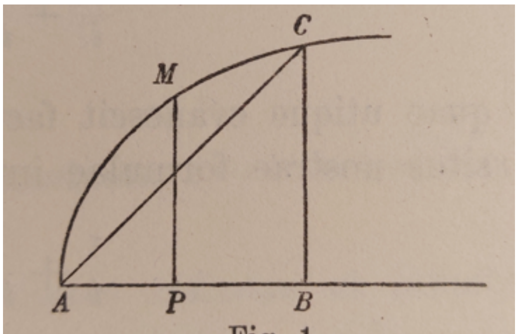

Fig. 1.

[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia version.

der Abszisse $AB = 1$ entspricht hingegen die Ordinate $BC = 1$; nachdem diese Kurve beschrieben worden ist, wird ihre Fläche $AMCB$ die Fläche des Dreiecks ABC, welche $= \frac{1}{2}$ ist, nicht um vieles übersteigen.

§3 Neulich habe ich aber mit anderen Untersuchungen beschäftigt wider Erwarten entdeckt, dass diese Fläche dem hyperbolischen Logarithmus von zwei gleich ist, sodass sie in Dezimalbrüchen $\log 2 = 0,6931471805$ ist; ich bin aber auf dem folgenden Weg dorthin gelangt. Weil tatsächlich $\log z = \frac{z^0 - 1}{0}$ ist, weil durch Differenzieren auf beiden Seiten ja $\frac{dz}{z} = \frac{dz}{z}$ hervorgeht und für $z = 1$ genommen jeder der beiden Ausdrücke verschwindet, schreibe ich $\frac{1}{i}$ anstelle von 0, während i eine unendliche Zahl bedeutet, und es wird $\log z = i\left(z^{\frac{1}{i}} - 1\right)$ und daher die Ordinate

$$y = \frac{z-1}{i\left(z^{\frac{1}{i}} - 1\right)} = \frac{1-z}{i\left(1 - z^{\frac{1}{i}}\right)}$$

und die Integralformel $\int \frac{(1-z)dz}{i\left(1-z^{\frac{1}{i}}\right)}$ sein. Nun setze ich also $z^{\frac{1}{i}} = x$, dass $z = x^i$ wird, wo man bemerke, dass für jede der beiden Integrationsgrenzen $z = 0$ und $z = 1$ auch $x = 0$ und $x = 1$ sein wird; weil also daher $dz = ix^{i-1}dx$ wird, wird die Integralformel

$$\int \frac{x^{i-1}dx(1-x^i)}{1-x},$$

welche also von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ integriert werden muss.

§4 Wir wollen nun i als eine sehr große Zahl ansehen und der Bruch $\frac{1-x^i}{1-x}$ wird in diese geometrische Progression aufgelöst

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots + x^{i-1},$$

deren einzelne Terme mit $x^{i-1}dx$ multipliziert und integriert diese Reihe liefern

$$\frac{x^i}{i} + \frac{x^{i+1}}{i+1} + \frac{x^{i+2}}{i+2} + \frac{x^{i+3}}{i+3} + \cdots + \frac{x^{2i-1}}{2i-1},$$

welche natürlich für $x = 0$ gesetzt verschwindet. Nun nehme man also $x = 1$ und der gesuchte Wert unserer Integralformel wird

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \cdots + \frac{1}{2i-1}$$

sein, wo der Buchstabe i freilich eine unendlich große Zahl bezeichnet, sodass die Anzahl dieser Terme in Wirklichkeit unendlich ist. Nichtsdestoweniger, weil die einzelnen Terme unendlich klein sind, wird diese Reihe eine endliche Summe haben, welche sich auf die folgende Weise auf eine gewöhnliche Reihe zurückführen lässt.

§5 Die gefundene Reihe kann als Differenz zwischen diesen zwei harmonischen Reihen betrachtet werden

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2i-1},$$
$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{i-1},$$

weil ja die Differenz $A - B$ die gefundene Reihe selbst darbietet; weil aber die Anzahl der Terme der Reihe A hier $2i - 1$ ist, der Reihe B hingegen $i - 1$, ist jene doppelt so groß wie diese, weshalb, damit wir eine gewöhnliche Reihe erhalten, wir die einzelnen Terme der Reihe B entsprechnd vom zweiten, vierten, sechsten, achten etc. Term der Reihe A abziehen wollen, wonach wir gleichzeitig zum Ende von beiden gelangen und

$$A - B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc. bis ins Unendliche}$$

sein wird, deren Wert also $\log 2$ ist, sodass nun freilich streng bestätigt worden ist, dass der Wert der vorgelegten Integralformel $\int \frac{(z-1)dz}{\log z}$ im Fall $z = 1$ tatsächlich $= \log 2$ ist.

§6 Die gleiche Begründung kann auch auf die allgemeinere Integralformel

$$\int \frac{(z^m - 1)dz}{\log z}$$

angewandt werden und man wird schließlich finden, dass im Fall $z = 1$ ihr Wert $\log(m + 1)$ sein wird; weil also in gleicher Weise $\int \frac{(z^n-1)dz}{\log z} = \log(n + 1)$

sein wird, wenn wir diese von jener abziehen, geht die folgende Integration hervor

$$\int \frac{(z^m - z^n)dz}{\log z} = \log \frac{m+1}{n+1},$$

wenn die Integration natürlich von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt wird.

§7 Weil dieser Beweis aber über unendliche und unendlich kleine Größen verläuft, vermissen wir mit Recht eine andere verständliche und gewohnte Methode, welche zu denselben Summen führen kann; diese Untersuchung wird freilich höchst schwierig erscheinen. Dennoch habe ich indes, nachdem mich neulich die Betrachtung von Funktionen zweier Variablen zur Integration von völlig einzigartigen Differentialformeln geführt hatte, welche mit anderen Methoden vergebens versucht werden, dass aus demselben Prinzip auch die hier dargebotenen herzuleiten sind. Ich werde also die Methode als quasi vollkommen neue Quelle, aus welcher sich mit anderen Methoden unzugängliche Integrationen schöpfen lassen, klar und deutlich erklären, welcher Aufgabe ich diese Abhandlung hauptsächlich gewidmet habe.

Lemma 1

§8 *Wenn P irgendeine Funktion der zwei Variablen z und u war und $\int Pdz = S$ gesetzt wird, dass auch S eine Funktion der zwei Variablen z und u ist, dann wird*

$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$$

sein.

Beweis

Weil in der Integration der Formel $\int Pdz$ allein z als Variable betrachtet wird, wird $\left(\frac{dS}{dz}\right) = P$ sein, welche Formel erneut nach u differenziert $\left(\frac{ddS}{dudz}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right)$ liefert, welche mit dz multipliziert und integriert

$$\left(\frac{dS}{du}\right) = \int dz \left(\frac{dP}{du}\right)$$

erzeugt, weil ja aus den Grundlagen der Integralrechnung $\int dz \left(\frac{ddS}{dzdu}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$ ist. Q.E.D.

KOROLLAR 1

§9 Auf dieselbe Weise lässt sich über Differentiale von dieser Art, wo nur u als Variable angesehen wird, weiter fortschreiten, woher die folgenden Integrationen

$$\left(\frac{ddS}{du^2}\right) = \int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right)$$

und

$$\left(\frac{d^3S}{du^3}\right) = \int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right)$$

etc.

entspringen.

KOROLLAR 2

§10 Wenn also die Formel $\int Pdz$ integrierbar war, sodass ihr Integral S dargeboten werden kann, dann werden all diese Integralformeln

$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right), \quad \int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right), \quad \int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right) \quad \text{etc.}$$

eine Integration zulassen und die Integrale selbst werden sogar dargeboten werden können.

§11 Aus diesen Formeln, wenn sie im Allgemeinen behandelt werden, ergießt sich wenig an Nützlichkeit auf das Integralkalkül. Aber wenn die Funktion P so beschaffen war, dass das Integral $\int Pdz$ zumindest in einem speziellen Fall, in dem nach der Integration der Variable z ein bestimmter Wert, sei er $z = a$, zugeteilt wird, in bequemer Weise dargeboten werden kann, dass in diesem Fall die Größe S in eine hinreichend einfache Funktion allein von u übergeht, dann werden die erwähnten Integrationen gleichermaßen Geltung haben, wenn nach den einzelnen Integrationen $z = a$ gesetzt wird, und daher wird meistens zu Integrationen von solcher Art gelangt, welche sich mit anderen Methoden kaum oder nicht einmal kaum bewältigen lassen; und daher entspringt:

DAS ERSTE PRINZIP VON INTEGRATIONEN

§12 Wenn P eine Funktion der zwei Variablen z und u war, dass der Wert des Integrals $\int Pdz$ zumindest in einem bestimmten Fall $z = a$ in bequemer Weise ausgedrückt werden kann, welcher Wert $= S$ sei, natürlich eine Funktion nur von u, dann werden auch die folgenden Integrale, wenn nach der Integration in gleicher Weise $z = a$ gesetzt wird, angenehm dargeboten werden können, nämlich

$$\int Pdz = S,$$

$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right),$$

$$\int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right) = \left(\frac{ddS}{du^2}\right),$$

$$\int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right),$$

$$\int dz \left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$$

etc.

BEISPIEL 1

§13 Wenn $P = z^u$ war, wird freilich im Allgemeinen

$$\int Pdz = \frac{z^{u+1}}{u+1}$$

sein wird, woher im Fall $z = 1$ dieser ziemlich einfache Wert $\frac{1}{u+1}$ entspringt, sodass $S = \frac{1}{u+1}$ ist; weil weiter nach wiederholter Differentiation nach u

$$\left(\frac{dP}{du}\right) = z^u \log z$$

hervorgeht, dann aber

$$\left(\frac{ddP}{du^2}\right) = z^u (\log z)^2,$$

weiter

$$\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = z^u (\log z)^3, \quad \left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = z^u (\log z)^4 \quad \text{etc.},$$

werden daraus die folgenden Integralwerte erhalten, wenn freilich nach den einzelnen Integrationen $z = 1$ gesetzt wird:

$$\begin{array}{r|l}
\displaystyle\int z^u dz = +\frac{1}{u+1} & \displaystyle\int z^u dz (\log z)^4 = +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(u+1)^5} \\
\displaystyle\int z^u dz \log z = -\frac{1}{(u+1)^2} & \displaystyle\int z^u dz (\log z)^5 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(u+1)^5} \\
\displaystyle\int z^u dz (\log z)^2 = +\frac{1 \cdot 2}{(u+1)^3} & \displaystyle\int z^u dz (\log z)^6 = +\frac{1 \cdots 6}{(u+1)^7} \\
\displaystyle\int z^u dz (\log z)^3 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(u+1)^4} & \displaystyle\int z^u dz (\log z)^7 = -\frac{1 \cdots 7}{(u+1)^8}
\end{array}$$

woher wir schließen, dass allgemein

$$\int z^u dz (\log z)^n = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{(u+1)^{n+1}}$$

sein wird, wo das Zeichen $+$ gilt, wenn n eine gerade Zahl ist, das andere $-$ hingegen, wenn n eine ungerade Zahl ist. Diese Integration sind freilich schon aus einer anderen Quelle hinreichend bekannt, was nicht verwunderlich ist, weil wir ja eine so einfache Formel für P angenommen haben; wir wollen also kurz die Fälle wiederholen, welche ich schon neulich erledigt habe.

Beispiel 2

Wenn

$$P = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}$$

war, habe ich schon vor langer Zeit bewiesen, dass der Integralwert der Formel $\int Pdz$ im Fall, in welchem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird,

$$S = \frac{\pi}{2n\cos\frac{\pi u}{2n}}$$

ist; daher also, weil

$$\left(\frac{dP}{du}\right) = \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} \log z$$

ist, dann aber

$$\left(\frac{ddP}{du^2}\right) = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} (\log z)^2$$

und

$$\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} (\log z)^3$$

etc.,

haben wir aus dem bekannten Wert S diese Integrationen erhalten

$$\text{I.} \quad \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz = S = \frac{\pi}{2n\cos\frac{\pi u}{2n}},$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz \log z = \left(\frac{dS}{du}\right),$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz (\log z)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right),$$

$$\text{IV.} \quad \int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz (\log z)^3 = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right),$$

$$\text{V.} \quad \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz (\log z)^4 = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right),$$

etc.

Beispiel 3

§15 Wenn

$$P = \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}$$

war, habe ich auf ähnliche Weise bewiesen, dass der Wert der Integralformel $\int Pdz$ im Fall, in dem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird,

$$S = \frac{\pi}{2n} \tan \frac{\pi u}{2n}$$

sein wird; und daher sind die folgenden Integrationen für denselben Fall $z = 1$ abgeleitet worden

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad && \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} dz = S = \frac{\pi}{2n} \tan \frac{\pi u}{2n}, \\
&\text{II.} \quad && \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} dz \log z = \left(\frac{dS}{du}\right), \\
&\text{III.} \quad && \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} dz (\log z)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right), \\
&\text{IV.} \quad && \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} dz (\log z)^3 = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right), \\
&\text{V.} \quad && \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} dz (\log z)^4 = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)
\end{aligned}$$

etc.

Scholion

§16 Damit wir also die reicheren Erträge aus diesem Prinzip einfahren können, geht die wesentliche Aufgabe darauf zurück, dass wir Funktionen der zwei Variablen z und u für P ausfindig machen, sodass der Wert der Integralformel zumindest in einem bestimmten Fall, sei er $z = 1$, geschlossen angegeben werden kann, wie es in den erwähnten Beispielen möglich war. Wie aber dieses Prinzip aus wiederholter Ableitung abgeleitet worden ist, so wird auf dieselbe Weise wiederholte Integration zu unserem Nutzen angewandt werden können.

LEMMA 2

§17 *Wenn P eine Funktion der zwei Variablen z und u war und $\int Pdz = S$ gesetzt wird, dass auch S eine Funktion der zwei Variablen z und u ist, dann wird $\int Sdu = \int dz \int Pdu$ sein, wo in den Integralformeln $\int Pdu$ und $\int Sdu$ allein u als Variable angesehen wird, in der Formel $\int dz \int Pdu$ aber allein z.*

BEWEIS

Man setze $\int Sdu = V$, dass $S = \left(\frac{dV}{du}\right)$ und daher $\left(\frac{dV}{du}\right) = \int Pdz$ ist, und es wird $\left(\dfrac{ddV}{dzdu}\right) = P$ sein; daher wird durch Multiplizieren mit du und Integrieren $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \int Pdu$ sein, woraus $V = \int dz \int Pdu = \int Sdu$ folgt. Q. E. D.

KOROLLAR 1

§18 Auf diese Weise kann auch die Integration wiederholt werden; daher wird eine solche Gleichung entspringen $\int du \int Sdu = \int dz \int du \int Pdu$; daher kann aber meistens auch wenig von Nutzen erwartet werden, wenn diese Integrationen nicht zufällig in bequemer Weise gelingen.

KOROLLAR 2

§19 Wenn also die Integralformel $\int Pdz$ integrierbar war, natürlich $= S$, wird die andere daraus abgeleitete $\int dz \int Pdu$ nur so sehr integriert werden können, wie sich das Integral $\int Sdu$ integrieren ließt.

ZWEITES PRINZIP DER INTEGRATIONEN

§20 Wenn P eine Funktion der zwei Variablen z und u solcher Art war, dass der Wert der Integralformel $\int Pdz$ zumindest in einem bestimmten Fall, sei er $z = a$, in bequemer Weise dargeboten werden kann, sodass in diesem Fall die Größe S eine Funktion der Variable u allein ist, dann wird für denselben Fall $z = a$ auch der Wert dieser Integralformel $\int dz \int Pdu$ angegeben werden können, wenn sich nur die Formel $\int Sdu$ integrieren ließen.

Beispiel 1

§21 Wir wollen $P = z^u$ nehmen und es wird $\int Pdz = \frac{z^{u+1}}{u+1}$ sein, welche Formel im Fall $z = 1$ in $\frac{1}{u+1}$ übergeht, welche man also anstelle von S schreibe. Weil dann aber

$$\int Pdz = \int z^u du = \frac{z^u}{\log z}$$

und weil $\int Sdu = \log(u+1)$ ist, wird

$$\int \frac{z^u dz}{\log z} = \log(u+1)$$

sein, wenn freilich nach jener Integration $z = 1$ gesetzt wird. Weil aber jede Integration die Addition einer Konstante verlangt, wird hier eher

$$\int \frac{z^u dz}{\log z} = \log(u+1) + C$$

gesetzt werden müssen und hier wird freilich leicht eingesehen, dass diese Konstante C unendlich sein muss, weil ja in der Integralformel der Bruch $\frac{z^u}{\log z}$ für $z = 1$ unendlich wird, sodass daher wenig für unser Unterfangen zu folgen scheint.

Korollar 1

§22 Weil ja aber diese Konstante C nicht von der Variable u abhängt, wird sie denselben Wert beibehalten, welche bestimmten Zahlen auch immer für u angenommen werden. Wir wollen also zuerst $u = m$ nehmen, dann aber auch $u = n$, dass wir diese Werte haben

$$\text{I.} \quad \int \frac{z^m dz}{\log z} = \log(m+1) + C$$

und

$$\text{II.} \quad \int \frac{z^n dz}{\log z} = \log(n+1) + C,$$

die eine von welchen von der anderen subtrahiert diese höchst bemerkenswerte zurücklassen wird

$$\int \frac{(z^m - z^n)dz}{\log z} = \log \frac{m+1}{n+1},$$

so wie wir schon oben [§ 6] aus ganz anderen Prinzipien heraus bewiesen haben.

KOROLLAR 2

§23 Wenn wir nun zu einer anderen Integration voranschreiten, weil $\int Pdu = \frac{z^u}{\log z}$ ist, wird

$$\int du \int Pdu = \frac{z^u}{(\log z)^2}$$

sein; dann wird aber wegen $\int Sdu = \log(u+1) + C$

$$\int du \int Sdu = (u+1)(\log(u+1) - 1) + Cu + D$$

sein und so werden wir

$$\int \frac{z^u dz}{(\log z)^2} = (u+1)(\log(u+1) - 1) + Cu + D$$

haben, wo die Konstanten C und D nicht von u abhängen werden; um sie zu eliminieren, wollen wir diese bestimmten Fälle entwickeln

$$\text{I.} \quad \int \frac{z^m dz}{(\log z)^2} = (m+1)\log(m+1) - m - 1 + Cm + D,$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{z^n dz}{(\log z)^2} = (n+1)\log(n+1) - n - 1 + Cn + D,$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{z^k dz}{(\log z)^2} = (k+1)\log(k+1) - k - 1 + Ck + D$$

und es wird

$$\text{I} - \text{III} = (m+1)\log(m+1) - (k+1)\log(k+1) + k - m + C(m-k)$$

und

$$\mathrm{II} - \mathrm{III} = (n+1)\log(n+1) - (k+1)\log(k+1) + k - n + C(n-k)$$

sein und daher leiten wir

$$(\mathrm{I}-\mathrm{III})(n-k) - (\mathrm{II}-\mathrm{III})(m-k) = \begin{cases} \quad (m+1)(n-k)\log(m+1) \\ - \ (k+1)(n-k)\log(k+1) + (k-m)(n-k) \\ - \ (n+1)(m-k)\log(n+1) - (k-n)(m-k) \\ +(k+1)(m-k)\log(k+1) \end{cases}$$

ab und daraus leiten wir die folgende Integration her

$$\int \frac{dz((n-k)z^m - (m-k)z^n + (m-n)z^k)}{(\log z)^2} = \begin{cases} + \ (m+1)(n-k) \ \log(m+1) \\ - \ (n+1) \ (m-k)\log(n+1) \\ + \ (k+1) \ (m-n)\log(k+1) \end{cases}$$

Korollar 3

§24 Es wird der Mühe wert sein, einige Fälle zu entwickeln, wo freilich die Zahlen m, n und k einander ungleich angenommen werden sollten, weil sich ansonsten alle Terme aufheben würden.

I. Es sei also $m = 2$, $n = 1$ und $k = 0$; dann ist

$$\int \frac{(z-1)^2 dz}{(\log z)^2} = 3\log 3 - 4\log 2 = \log \frac{27}{16}.$$

II. Es sei $m = 3$, $n = 1$ und $k = 0$; dann ist

$$\int \frac{(z^3 - 3z + 2)dz}{(\log z)^2} = \int \frac{dz(z-1)^2(z+2)}{(\log z)^2} = 4\log 4 - 6\log 2 = 2\log 2 = \log 4.$$

III. Es sei $m = 3$, $n = 2$ und $k = 0$; dann ist

$$\int \frac{(2z^3 - 3zz + 1)dz}{(\log z)^2} = \int \frac{dz(z-1)^2(2z+2+1)}{(\log z)^2} = 8\log 4 - 9\log 3 = \log \frac{4^8}{3^9}.$$

IV. Es sei $m = 3$, $n = 2$ und $k = 1$; dann ist

$$\int \frac{(2z^3 - 2zz + z)dz}{(\log z)^2} = \int \frac{zdz(z-1)^2}{(\log z)^2} = 4\log 4 - 6\log 3 + 2\log 2 = \log \frac{2^{10}}{3^6}.$$

KOROLLAR 4

§25 In diesen Fällen tritt das Phänomen auf, dass der Zähler in den Integralformeln den Faktor $(z-1)^2$ hat, was daher notwendigerweise passiert, dass die Werte der Integrale nicht unendlich werden. Weil nämlich der Nenner $(\log z)^2$ im Fall $z = 1$ verschwindet, wenn wir $z = 1 - \omega$ setzen, während ω unendlich klein ist, wird

$$\log z = -\omega \quad \text{und} \quad (\log z)^2 = +\omega\omega$$

sein. Es ist also notwendig, dass im Zähler ein Faktor vorhanden ist, welcher im Fall $z = 1 - \omega$ ebenso $\omega\omega$ liefert, was passiert, wenn dort der Faktor $(z-1)^2$ vorhanden war.

SCHOLION

§26 Die Integration, welche wir im ersten Korollar erlangt haben, scheint daher der vollen Aufmerksamkeit würdig, weil ich die daraus entstandenen Integralwerte im Fall $z = 1$ in keiner Weise hatte angeben können, obwohl sie so leicht mit Logarithmen ausgedrückt werden. Aber die im zweiten Korollar gefundenen Integrationen, obwohl sie viel schwieriger scheinen, können dennoch ohne Mühe aus der ersten mithilfe von bekannten Reduktionen abgeleitet werden; es wird genügen, das für einen einzigen Fall gezeigt zu haben. Wir wollen

$$\int \frac{dz(z-1)^2}{(\log z)^2} = \frac{p}{\log z} + \int \frac{qdz}{\log z}$$

setzen und durch Differenzieren wird

$$\frac{dz(z-1)^2}{(\log z)^2} = \frac{dp}{\log z} - \frac{pdz}{z(\log z)^2} + \frac{qdz}{\log z}$$

sein, woher wir, nachdem die gleichen Terme einzeln entweder durch $(\log z)^2$ oder durch $\log z$ geteilt worden sind, diese zwei Gleichheiten

$$(z-1)^2 = -\frac{p}{z} \quad \text{und} \quad dp = -qdz$$

haben werden, aus deren erster $p = -z(z-1)^2$ entspringt und daraus

$$\frac{dp}{dz} = -3zz + 4z - 1 \quad \text{und daher} \quad q = 3zz - 4z + 1,$$

sodass

$$\int \frac{dz(z-1)^2}{(\log z)^2} = -\frac{-z(z-1)^2}{\log z} + \int \frac{(3zz-4z+1)dz}{\log z}$$

ist; hier verschwindet aber das erste Glied für $z = 1$ direkt; denn für $z = 1 - \omega$ gesetzt, dass $\log z = -\omega$ ist, wird $p = -\omega\omega(1-\omega)$ und daher $\frac{p}{\log z} = \omega(1-\omega) = 0$ wegen $\omega = 0$ sein; das zweite Glied kann hingegen in diese Teile geteilt werden

$$3\int \frac{(zz-z)dz}{\log z} - \int \frac{(z-1)dz}{\log z}.$$

Das Integral des ersten Teils ist aber $3\log\frac{3}{2}$, des zweiten hingegen $-1\log 2$ und so wird dieses ganze Integral

$$3\log\frac{3}{2} - \log 2 = 3\log 3 - 4\log 2 = \log\frac{27}{16}$$

sein, genauso wie wir gefunden haben. Wenn wir auf diese Weise im Allgemeinen

$$\int \frac{Vdz}{(\log z)^2} = \frac{p}{\log z} + \int \frac{qdz}{\log z}$$

setzen, wird durch Differenzieren

$$\frac{Vdz}{(\log z)^2} = \frac{dp}{\log z} - \frac{pdz}{z(\log z)^2} + \frac{qdz}{\log z}$$

sein, woher diese zwei Gleichheiten folgen

$$p = -Vz \quad \text{und} \quad q = -\frac{dp}{dz}.$$

Damit nun der Term $\frac{p}{\log z}$ für $z = 1$ gesetzt verschwindet, muss der Zähler p den Faktor $(z-1)^2$ haben, welcher also auch ein Faktor der Größe V sein muss. Es sei also

$$V = \frac{U(z-1)^2}{z}$$

und es wird

$$p = -U(z-1)^2$$

sein, woher

$$dp = -dU(z-1)^2 - 2Udz(z-1) = (z-1)(-dU(z-1) - 2Udz)$$

wird, und daher

$$qdz = (z-1)(2Udz + dU(z-1)),$$

weil also q den Faktor $z-1$ hat, kann die Formel $\int \frac{qdz}{\log z}$ immer in Teile aufgelöst werden, deren Integrale sich nach dem ersten Korollar angeben lassen, wenn nur U ein Aggregat aus beliebigen Potenzen von z war; daher wird das folgende Theorem abgeleitet.

THEOREM

§27 *Wenn*

$$P = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \text{etc.}$$

in einer solchen Weise war, dass die Summe der Koeffizienten

$$A + B + C + D + \text{etc.} = 0,$$

ist, dann wird

$$\int \frac{Pdz}{\log z} = A\log(\alpha+1) + B\log(\beta+1) + C\log(\gamma+1) + D\log(\delta+1) + \text{etc.}$$

sein, wenn freilich nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird.

Beweis

Weil dieses im Fall, in dem nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird,

$$\int \frac{z^n dz}{\log z} = \log(n+1) + \Delta$$

ist, während Δ jene durch Integration eingegangene unendlich große Konstante bezeichnet, wird

$$A\int \frac{z^\alpha dz}{\log z} = A\log(\alpha+1) + A\Delta$$

und in gleicher Weise

$$B\int \frac{z^\beta dz}{\log z} = B\log(\beta+1) + B\Delta$$

etc.

sein; wenn all diese Integrale zu einer Summa gesammelt werden, wird

$$(A + B + C + D + \text{etc.})\Delta = 0$$

sein und daher wird das gesuchte Integral

$$\int \frac{Pdz}{\log z} = A\log(\alpha+1) + B\log(\beta+1) + C\gamma\log(\gamma+1) + D\log(\delta+1) + \text{etc.}$$

sein. Q. E. I.

Korollar 1

§28 Weil wir hier

$$A + B + C + D + \text{etc.} = 0$$

angenommen haben, ist es ersichtlich, dass

$$P = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \text{etc.}$$

den Faktor $z - 1$ hat, wie wir schon zuvor angemerkt haben.

Korollar 2

§29 Weil

$$(z-1)^n = z^n - \frac{n}{1}z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^{n-3} + \text{etc.}$$

ist, wird, nachdem dieser Wert anstelle von P eingesetzt worden ist,

$$A = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = n$$

sein, dann

$$B = -\frac{n}{1} \quad \text{und} \quad \beta = n - 1,$$

weiter

$$C = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \quad \text{und} \quad \gamma = n - 2 \quad \text{etc.;}$$

daher wird also

$$\int \frac{(z-1)^n dz}{\log z} = \log(n+1) - \frac{n}{1}\log n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\log(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\log(n-2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\log(n-3) - \text{etc.}$$

sein, wenn nur der Exponent n größer also Null oder zumindest nicht kleiner als die Einheit war, weil andernfalls im Fall $z = 1$ der Bruch $\frac{(z-1)^n}{\log z}$ unendlich werden würde; dies stünde aber nicht im Wege, dass die oben betrachtete Fläche endlich werden wird, sodass es genügt, wenn nur $n > 0$ ist.

Beispiel 2

§30 Es sei $P = \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^n}$; es wird

$$\int Pdz = \frac{\pi}{2n\cos\frac{\pi u}{2n}}$$

sein, wenn nach der Integration $z = 1$ gesetzt wird, welchen Wert wir also dem Buchstaben S zuteilen. Für konstant betrachtetes z wird

$$\int Pdu = \frac{1}{1+z^{2n}}\left(\int z^{n-u-1}du + \int z^{n+u-1}dz\right)$$

sein und daher

$$\int Pdu = \frac{-z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{(1+z^{2n})\log z},$$

woher

$$\int Sdu = \int \frac{-z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}}\cdot\frac{dz}{\log z}$$

werden wird; weil also $\cos\frac{\pi u}{2n} = \sin\frac{\pi(n-u)}{2n}$ ist, wird

$$\int Sdu = \int \frac{\pi du}{2n\sin\frac{\pi(n-u)}{2n}}$$

sein; daher, wenn wir $\frac{\pi(n-u)}{2n} = \varphi$ setzen, wird $d\varphi = -\frac{\pi du}{2n}$ sein und daher

$$\int Sdu = -\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\log\tan\frac{1}{2}\varphi$$

sein, weshalb wir

$$\int Sdu = -\log\tan\frac{\pi(n-u)}{4n}$$

haben, sodass wir, nachdem nach der Integration $z = 1$ gesetzt worden ist, diese Integration erlangt haben

$$\int\frac{-z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}}\cdot\frac{dz}{\log z} = -\log\tan\frac{\pi(n-u)}{4n} = +\log\tan\frac{\pi(n+u)}{4n}.$$

Beispiel 3

§31 Es sei $P = \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}$; es wird

$$\int P dz = \frac{\pi}{2n} \tan \frac{\pi u}{2n} = S$$

sein, woher

$$\int S du = -\log \cos \frac{\pi u}{2n}$$

wird; daher, weil

$$\int P du = \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{(1-z^{2n}) \log z}$$

ist, erhalten wir die folgende Integration, wenn das Integral freilich von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt wird,

$$\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1-z^{2n}} \cdot \frac{dz}{\log z} = +\log \cos \frac{\pi u}{2n}.$$

Diese zwei letzten Beispiele habe ich schon zuvor gründlicher behandelt; daher halte ich mit ihrer weiteren Entwicklung nicht auf, sondern schreite zum folgenden Problem voran.

Problem

§32 *Wenn diese zwei unendlichen Reihen vorgelegt werden*

$$P = z \cos u + z^2 \cos 2u + z^3 \cos 3u + z^4 \cos 4u + z^5 \cos 5u + \text{etc.}$$

und

$$Q = z \sin u + z^2 \sin 2u + z^3 \sin 3u + z^4 \sin 4u + z^5 \sin 5u + \text{etc.},$$

welche die beiden Variablen z und u beinhalten, die Relationen zwischen den Integralformeln $\int \frac{Pdz}{z}$, $\int Pdu$ *und* $\int \frac{Qdz}{z}$, $\int Qdu$ *und mithilfe wiederholter Integration daraus entstehende andere Formeln zu finden.*

LÖSUNG

Weil jede der beiden Reihen eine rekurrente ist, findet man in endlichen Formeln

$$P = \frac{z\cos u - zz}{1 - 2z\cos u + zz} \quad \text{und} \quad Q = \frac{z\sin u}{1 - 2z\cos u + zz},$$

woher

$$\int \frac{Pdz}{z} = \int \frac{dz\cos u - zdz}{1 - 2z\cos u + zz} = -\log\sqrt{1 - 2z\cos u + zz}$$

und

$$\int Qdu = \int \frac{zdu\sin u}{1 - 2z\cos u + zz} = +\log\sqrt{1 - 2z\cos u + zz}$$

wird, sodass $\int \frac{Pdz}{z} = -\int Qdu$ ist; dann wird aber auch

$$\int \frac{Qdz}{z} = \int \frac{dz\sin u}{1 - 2z\cos u + zz} = \arctan\frac{z\sin u}{1 - z\cos u}$$

sein; aber wenn dieser Bogen nach der Winkelvariable u differenziert wird, wird

$$\frac{d}{du}\arctan\frac{z\sin u}{1 - z\cos u} = \frac{z\cos u - zz}{1 - 2z\cos u + zz}$$

sein, sodass $\int \frac{Qdz}{z} = \int Pdu$ ist.

§33 Aber dieselben Relationen werden leichter aus den Reihen selbst abgeleitet. Weil nämlich

$$P = z\cos u + z^2\cos 2u + z^3\cos 3u + z^4\cos 4u + \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int \frac{Pdz}{z} = \frac{z\cos u}{1} + \frac{zz\cos 2u}{2} + \frac{z^3\cos 3u}{3} + \text{etc.}$$

und

$$\int Pdu = \frac{z\sin u}{1} + \frac{zz\sin 2u}{2} + \frac{z^3\sin 3u}{3} + \text{etc.}$$

sein, und weil

$$Q = z\sin u + zz\sin 2u + z^3\sin 3u + \text{etc.}$$

ist, wird

$$\int \frac{Qdz}{z} = \frac{z\sin u}{1} + \frac{zz\sin 2u}{2} + \frac{z^3\sin 3u}{3} + \text{etc.}$$

und

$$\int Qdu = -\frac{z\cos u}{1} - \frac{zz\cos 2u}{2} - \frac{z^3\cos 3u}{3} + \text{etc.}$$

wird, woher es klar ist, dass

$$\int \frac{Pdz}{z} = -\int Qdu \quad \text{und} \quad \int \frac{Qdz}{z} = \int Pdu$$

sein wird.

§34 Damit sich auf diese Weise weiter fortschreiten lässt, wollen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{z\cos u}{1} + \frac{zz\cos 2u}{2} + \frac{z^3\cos 3u}{3} + \text{etc.},\\
P'' &= \frac{z\cos u}{1^2} + \frac{zz\cos 2u}{2^2} + \frac{z^3\cos 3u}{3^2} + \text{etc.},\\
P''' &= \frac{z\cos u}{1^3} + \frac{zz\cos 2u}{2^3} + \frac{z^3\cos 3u}{3^3} + \text{etc.},\\
P'''' &= \frac{z\cos u}{1^4} + \frac{zz\cos 2u}{2^4} + \frac{z^3\cos 3u}{3^4} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

und

$$
\begin{aligned}
Q' &= \frac{z\sin u}{1} + \frac{zz\sin 2u}{2} + \frac{z^3\sin 3u}{3} + \text{etc.},\\
Q'' &= \frac{z\sin u}{1^2} + \frac{zz\sin 2u}{2^2} + \frac{z^3\sin 3u}{3^2} + \text{etc.},\\
Q''' &= \frac{z\sin u}{1^3} + \frac{zz\sin 2u}{2^3} + \frac{z^3\sin 3u}{3^3} + \text{etc.},\\
Q'''' &= \frac{z\sin u}{1^4} + \frac{zz\sin 2u}{2^4} + \frac{z^3\sin 3u}{3^4} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

setzen und daraus werden die zuvor gefundenen Vergleiche fortgesetzt werden

$$
\begin{aligned}
P' &= \int \frac{Pdz}{z} = \int Qdu, & Q' &= -\int \frac{Qdz}{z} = \int Pdu,\\
P'' &= \int \frac{P'dz}{z} = \int Q'du, & Q'' &= -\int \frac{Q'dz}{z} = \int P'du,\\
P''' &= \int \frac{P''dz}{z} = \int Q''du, & Q''' &= -\int \frac{Q''dz}{z} = \int P''du,\\
P'''' &= \int \frac{P'''dz}{z} = \int Q'''du, & Q'''' &= -\int \frac{Q'''dz}{z} = \int P'''du,\\
&\text{etc.,} & &\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

woher viele außergewöhnliche Relationen abgeleitet werden können.

§35 Höchst bemerkenswert und für unser Unternehmen geeignet sind aber die Relationen, wo die Integralformeln, in denen allein z variablel ist, auf andere Integralformeln zurückgeführt werden, in denen allein u eine Variable ist, von welcher Art die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
P' &= \int \frac{Pdz}{z} = -\int Qdu,\\
P'' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{Pdz}{z} = -\int du \int Pdu,\\
P''' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Pdz}{z} = +\int du \int du \int Qdu,\\
P'''' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Pdz}{z} = +\int du \int du \int du \int Pdu,\\
P^{\text{V}} &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Qdz}{z} = -\int du \int du \int du \int du \int Qdu
\end{aligned}$$

etc.

Und in gleicher Weise wird für die andere Gattung gelten

$$\begin{aligned}
Q' &= \int \frac{Qdz}{z} = -+\int Pdu,\\
Q'' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{Qdz}{z} = -\int du \int Qdu,\\
Q''' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Qdz}{z} = -\int du \int du \int Qdu,\\
Q'''' &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Qdz}{z} = +\int du \int du \int du \int Qdu,\\
Q^{\text{V}} &= \int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Qdz}{z} = +\int du \int du \int du \int du \int Pdu
\end{aligned}$$

etc.

§36 Wenn wir also nun nur die Werte dieser Reihen oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Größen

$$P, \quad P', \quad P'', \quad P''', \quad P'''' \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad Q', \quad Q'', \quad Q''', \quad Q'''' \quad \text{etc.}$$

verlangen, welche sie für $z = 1$ gesetzt annehmen, werden wir diesen Vorteil haben, dass sich in den Integralformeln, wo allein der Winkel u als Variable angesehen wird, sofort vor den Integrationen $z = 1$ setzen lässt; nachdem dies aber getan worden ist, wird

$$P = \frac{\cos u - 1}{2 - 2\cos u} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\sin u}{2 - 2\cos u} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u$$

sein, dann aber weiter

$$\begin{aligned}
&\int Pdu = A - \frac{1}{2}u,\\
&\int du \int Pdu = B + Au - \frac{1}{4}uu,\\
&\int du \int du \int Pdu = C + Bu + \frac{1}{2}Auu - \frac{1}{12}u^3,\\
&\int du \int du \int du \int Pdu = D + Cu + \frac{1}{2}Buu + \frac{1}{6}Au^3 - \frac{1}{48}u^4;
\end{aligned}$$

aber für die Formeln, wo Q ist, gelingt die Rechnung nicht so angenehm; es wird nämlich gelten

$$\begin{aligned}
&Q = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u,\\
&\int Qdu = \log\sin\frac{1}{2}u,\\
&\int du \int Qdu = \int du \log\sin\frac{1}{2}u;
\end{aligned}$$

Weil diese Formel jeder Integration widerstrebt, lässt sich kaum weiter fortschreiten; indes wird dennoch

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int du \int du \int Qdu = \int du \int du \log\sin\frac{1}{2}u,\\
&\textstyle\int du \int du \int du \int Qdu = \int du \int du \int du \log\sin\frac{1}{2}u
\end{aligned}$$

sein.

§37 Was aber die ersten die Variable z beinhaltenden Formeln angeht, findet man über bekannte Reduktionen

$$\int \frac{P'dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{Pdz}{z} = \log z \int \frac{Pdz}{z} - \int \frac{Pdz}{z} \log z,$$

wo das erste Glied $\log z \int Pdz$ für $z = 1$ verschwindet, dann aber

$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{P'dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Pdz}{z} = + \int \frac{Pdz}{z} \frac{(\log z)^2}{2},$$

nach weiterer Darbietung welcher Ausdrücke wir erschließen, dass gelten wird

$P' = + \int \frac{Pdz}{z}$	$Q' = + \int \frac{Qdz}{z}$
$P'' = - \int \frac{Pdz}{z} \log z$	$Q'' = - \int \frac{Qdz}{z} \log z$
$P''' = + \int \frac{Pdz}{z} \frac{(\log z)^2}{1 \cdot 2}$	$Q''' = + \int \frac{Qdz}{z} \frac{(\log z)^2}{1 \cdot 2}$
$P^{\mathrm{IV}} = - \int \frac{Pdz}{z} \frac{(\log z)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$Q^{\mathrm{IV}} = - \int \frac{Qdz}{z} \frac{(\log z)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
etc.	etc.

§38 Aus diesen können wir also die Werte der folgenden Integralformeln im Fall angeben, in dem $z = 1$ ist.

$$
\begin{aligned}
P &= -\frac{1}{2},\\
P' &= \int \frac{Pdz}{z} = -\log\sin\frac{1}{2}u,\\
P'' &= -\int \frac{Pdz}{z}\log z = -B - Au + \frac{1}{4}uu,\\
P''' &= +\int \frac{Pdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^2}{1\cdot 2} = \int du \int du \log\sin\frac{1}{2}u,\\
P^{\mathrm{IV}} &= -\int \frac{Pdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^3}{1\cdot 2\cdot 3} = D + Cu + \frac{1}{2}Buu + \frac{1}{6}Au^3 - \frac{1}{48}u^4,\\
P^{\mathrm{V}} &= +\int \frac{Pdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \int du \int du \int du \int du \log\sin\frac{1}{2}u
\end{aligned}
$$

etc.

Und in der gleichen Weise

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u,\\
Q' &= \int \frac{Qdz}{z} = A - \frac{1}{2}u,\\
Q'' &= -\int \frac{Qdz}{z}\frac{\log z}{1} = -\int du \log\sin\frac{1}{2}u,\\
Q''' &= +\int \frac{Qdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^2}{2} = -C - Bu - \frac{1}{2}Auu + \frac{1}{12}u^3,\\
Q^{\mathrm{IV}} &= -\int \frac{Qdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^3}{6} = \int du \int du \int du \log\sin\frac{1}{2}u,\\
Q^{\mathrm{V}} &= +\int \frac{Qdz}{z}\cdot\frac{(\log z)^4}{24} = E + Du + \frac{1}{2}Cuu + \frac{1}{6}Bu^3 + \frac{1}{24}Au^4 - \frac{1}{240}u^5
\end{aligned}
$$

etc.

§39 Weil also

$$P = \frac{z\cos u - zz}{1 - 2z\cos u + zz} \quad \text{und} \quad Q = \frac{z\sin u}{1 - 2z\cos u + zz}$$

ist, haben wir bisher das erreicht, dass wir die Werte dieser Integralformeln

$$\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}(\log z)^n \quad \text{und} \quad \int \frac{dz\sin u}{1 - 2z\cos u + zz}(\log z)^n$$

im Fall $z = 1$ in angenehmer Weise über den Winkel u angeben können, wenn nur bekannt wäre, wie die Größen A, B, C, D etc. bestimmt werden müssen, was kaum auf eine andere Art als über die Reihen, woraus diese Größen entstanden sind, geschehen zu können scheint.

§40 Nachdem also die Integralformeln weggelassen worden sind, welche die Größe Q beinhalten, deren Integration natürlich weniger gelingt, wollen wir nur die anderen betrachten und werden, nachdem sofort $z = 1$ gesetzt worden ist, wo $P = -\frac{1}{2}$ wird, sodass

$$\cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cos 4u + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

ist, wenn wir mit du multiplizieren und integrieren,

$$Q' = \frac{\sin u}{1} + \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} + \frac{\sin 4u}{4} + \frac{\sin 5u}{5} + \text{etc.} = A - \frac{1}{2}u$$

haben, welche Konstante gleich Null zu sein erscheinen kann, weil für $u = 0$ gesetzt die Summe der Reihe zu verschwinden scheint; aber für einen unendlichen kleinen Winkel u wird diese Reihe

$$u + u + u + u + u + u + \text{etc. bis ins Unendliche}$$

liefern; es ist aber bekannt, dass eine solche Reihe eine endliche Summe haben kann, woraus wir nach Weglassen dieses Falls $u = \pi$ oder lieber $u = \pi + \omega$ setzen wollen und es wird, wobei der Winkel ω unendlich klein ist, diese Reihe hervorgehen

$$-\omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \text{etc.};$$

weil hier die Vorzeichen alternieren, besteht kein Zweifel, dass die Summe der Reihe verschwindet; weil diese $A - \frac{\pi}{2}$ sein muss, ist es ersichtlich, dass die Konstante $A = \frac{1}{2}\pi$ wird, sodass wir nun

$$Q' = \frac{\sin u}{1} + \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} + \frac{\sin 4u}{4} + \frac{\sin 5u}{5} + \text{etc.} = \frac{\pi - u}{2}$$

haben. Diese Methode die Konstante zu bestimmen, ist als erstes vom illustren Daniel Bernoulli verwendet worden, der außerdem viele wunderschöne Dinge über die Natur von diesen Reihen mitgeteilt hat.

§41 Wir wollen diese letzte Reihe weiter mit $-du$ multiplizieren und die Integration wird

$$P'' = \frac{\cos u}{1^2} + \frac{\cos 2u}{2^2} + \frac{\cos 3u}{2^2} + \frac{\cos 4u}{4^2} + \text{etc.} = B - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}$$

geben, um welche Konstante zu finden, wir zuerst $u = 0$ setzen wollen und es wird

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.} = B$$

werden. Die Summe dieser Reihe habe ich schon vor langer Zeit als erster bewiesen $= \frac{\pi\pi}{6}$ zu sein; aber wenn diese Wahrheit uns unbekannt wäre, wollen wir jene außergewöhnliche vom großen Bernoulli verwendete Methode gebrauche und wollen $u = \pi$ setzen und es wird

$$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \text{etc.} = B - \frac{\pi\pi}{2} + \frac{\pi\pi}{4} = B - \frac{\pi\pi}{4}$$

sein; diese beiden Reihen werden addiert

$$\frac{2}{2^2} + \frac{2}{4^2} - \frac{2}{6^2} + \frac{2}{8^2} + \text{etc.} = 2B - \frac{\pi\pi}{4}$$

geben, deren Doppeltes

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.} = 4B - \frac{\pi\pi}{2} = B$$

liefert, woher man $B = \frac{\pi\pi}{6}$ berechnet, sodass

$$P'' = \frac{\cos u}{1^2} + \frac{\cos 2u}{2^2} + \frac{\cos 3u}{3^2} + \frac{\cos 4u}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}$$

ist.

§42 Auf die gleiche Weise wollen wir weiter fortschreiten und durch erneutes Multiplizieren mit du und Integrieren erhalten wir

$$Q''' = \frac{\sin u}{1^3} + \frac{\sin 2u}{2^3} + \frac{\sin 3u}{3^3} + \frac{\sin 4u}{4^3} + \text{etc.} = C + \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12};$$

wenn hier $u = 0$ gesetzt wird, verschwindet die Summe der Reihe offenbar; denn für $u = \omega$ gesetzt ginge

$$\frac{\omega}{1^3} + \frac{\omega}{2^3} + \frac{\omega}{3^3} + \frac{\omega}{4^3} + \text{etc.} = \frac{\omega\pi\pi}{6}$$

hervor, was wegen $\omega = 0$ auch $= 0$ wird, und so wird $C = 0$ sein und daher

$$Q''' = \frac{\sin u}{1^3} + \frac{\sin 2u}{2^3} + \frac{\sin 3u}{3^3} + \frac{\sin 4u}{4^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12}.$$

§43 Diese Reihe multipliziere man mit $-du$ und die Integration wird

$$P^{\mathrm{IV}} = \frac{\cos u}{1^4} + \frac{\cos 2u}{2^4} + \frac{\cos 3u}{3^4} + \frac{\cos 4u}{4^4} + \text{etc.} = D - \frac{\pi\pi uu}{12} + \frac{\pi u^3}{12} - \frac{u^4}{48}$$

liefern; daher wird für $u = 0$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = D$$

werden; nun werde aber auch $u = \pi$ und es wird

$$-\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = D - \frac{\pi^4}{48}$$

werden; diese beiden Reihen geben addiert aber

$$\frac{2}{2^4} + \frac{2}{4^4} + \frac{2}{6^4} + \frac{2}{8^4} + \text{etc.} = 2D - \frac{\pi^4}{48},$$

welche achtmal genommen, dass die Zähler $= 2^4$ werden,

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = 16D - \frac{\pi^4}{6}$$

liefert, woraus $D = \frac{\pi^4}{90}$ entspringt, welches dieselbe Summe der Reihe

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}$$

ist, die ich schon vor langer Zeit gefunden hatte; wir werden nun

$$P'''' = \frac{\cos u}{1^4}+\frac{\cos 2u}{2^4}+\frac{\cos 3u}{3^4}+\frac{\cos 4u}{4^4}+\text{etc.} = \frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^2u^2}{12}+\frac{\pi u^3}{12}-\frac{u^4}{48}$$

haben.

§44 Durch erneutes Multiplizieren mit du und Integrieren erhalten wir

$$Q^{\mathrm{V}} = \frac{\sin u}{1^5}+\frac{\sin 2u}{2^5}+\frac{\sin 3u}{3^5}+\frac{\sin 4u}{4^5}+\text{etc.} = E+\frac{\pi^4 u}{90}-\frac{\pi^2u^3}{36}+\frac{\pi u^4}{48}-\frac{u^5}{240},$$

wo wie im vorletzten Fall die Konstante E wiederum $=0$ wird, sodass wir

$$Q^{\mathrm{V}} = \frac{\sin u}{1^5}+\frac{\sin 2u}{2^5}+\frac{\sin 3u}{3^5}+\frac{\sin 4u}{4^5}+\text{etc.} = \frac{\pi^4 u}{90}-\frac{\pi^2u^3}{36}+\frac{\pi u^4}{48}-\frac{u^5}{240}$$

haben.

§45 Wir wollen also erneut mit $-du$ multiplizieren und durch Integrieren wird

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{VI}} &= \frac{\cos u}{1^6}+\frac{\cos 2u}{2^6}+\frac{\cos 3u}{3^6}+\frac{\cos 4u}{4^6}+\text{etc.} \\ &= F-\frac{\pi^4}{90}\cdot\frac{uu}{2}+\frac{\pi\pi}{6}\cdot\frac{u^4}{24}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u^5}{120}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{720} \end{aligned}$$

hervorgehen, wo zur Bestimmung der Konstante $u=0$ gesetzt werde und es wird

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.} = F$$

sein; dann nehme man aber $u=\pi$ und es wird

$$-\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\text{etc.} = F-\frac{\pi^6}{480}$$

werden, welche addiert

$$\frac{2}{2^6}+\frac{2}{4^6}+\frac{2}{6^6}+\frac{2}{8^6}+\text{etc.}=2F-\frac{\pi^6}{480}$$

geben, welche man mit 32 multipliziere, dass alle Zähler $64=2^6$ werden, und es wird

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}=64F-\frac{\pi^6}{15}=F$$

entspringen, woher man $F=\frac{\pi^6}{945}$ berechnet, sodass

$$\begin{aligned}P^{\text{VI}}&=\frac{\cos u}{1^6}+\frac{\cos 2u}{2^6}+\frac{\cos 3u}{3^6}+\frac{\cos 4u}{4^6}+\text{etc.}\\&=\frac{\pi^6}{945}-\frac{\pi^4}{90}\cdot\frac{u^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{u^4}{24}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u^5}{120}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^8}{720}\end{aligned}$$

ist.

§46 Diese Reihen weiter fortzusetzen wäre überflüssig, weil das Fortschreitungsgesetz zur Genüge ersichtlich ist, besonders wenn die Summationen der geraden Potenzen der Reziproken zur Hilfe genommen werden, welche ich einst bis zur dreißigsten Potenz angegeben habe. Damit das besser erkannt wird, wollen wir diese Summe auf die folgende Weise darstellen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{etc.}=\alpha\pi\pi,\ \text{dass gilt:}\quad \alpha=\frac{1}{6},\\&\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{etc.}=\beta\pi^4,\ \text{dass gilt:}\quad \beta=\frac{1}{90},\\&\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{etc.}=\gamma\pi^6,\ \text{dass gilt:}\quad \gamma=\frac{1}{945},\\&\frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{etc.}=\delta\pi^8,\ \text{dass gilt:}\quad \delta=\frac{1}{9450}\end{aligned}$$

etc.

und nach Festlegen von diesen werden wir die folgenden Integrationen haben, natürlich für den Fall $z=1$,

$$
\begin{aligned}
Q' &= \int \frac{dz \sin u}{1-2z\cos u+zz} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}u = \arctan\frac{\sin u}{1-\cos u},\\
P'' &= -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{\log z}{1} = \alpha\pi\pi - \frac{1}{2}\pi u + \frac{1}{2}\cdot\frac{uu}{2},\\
Q''' &= +\int \frac{dz \sin u}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{1\cdot 2} = \alpha\pi\pi\frac{u}{1} - \frac{1}{2}\pi\frac{uu}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{6},\\
P^{\mathrm{IV}} &= -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{(\log z)^3}{6} = \beta\pi^4 - \alpha\alpha\frac{uu}{2} + \frac{1}{2}\pi\frac{u^3}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{24},\\
Q^{\mathrm{V}} &= +\int \frac{dz \sin u}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{24} = \beta\pi^4\frac{u}{1} - \alpha\pi\pi\frac{u^3}{6} + \frac{1}{2}\pi\frac{u^4}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{120},\\
P^{\mathrm{VI}} &= -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{(\log z)^5}{120} = \gamma\pi^6 - \beta\pi^4\frac{uu}{2} + \alpha\pi\pi\frac{u^4}{24} - \frac{1}{2}\pi\frac{u^5}{120} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{720},\\
Q^{\mathrm{VII}} &= +\int \frac{dz \sin u}{1-2z\cos u+zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{720} = \gamma\pi^6\frac{u}{1} - \beta\pi^4\frac{u^3}{6} + \alpha\pi\pi\frac{u^5}{120} - \frac{1}{2}\pi\frac{u^6}{720} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^7}{5040}
\end{aligned}
$$

etc.

§47 Es wird der Mühe wert sein, einige Fälle, in denen dem Winkel u ein gegebener Wert zugeteilt wird, vor Augen zu führen. Wir wollen also $u = 0$ setzen, in welchem Fall jede zweite unserer Formeln verschwindet, die übrigen werden hingegen

$$
\begin{aligned}
-\int \frac{dz}{1-z}\log z &= \alpha\pi\pi = \frac{\pi\pi}{6},\\
-\int \frac{dz}{1-z}\frac{(\log z)^3}{6} &= \beta\pi^4 = \frac{\pi^4}{90},\\
-\int \frac{dz}{1-z}\frac{(\log z)^5}{120} &= \gamma\pi^6 = \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned}
$$

liefern; diesen ähnlich sind die Formeln, die aus der Festlegung $u = \pi$ entspringen, wo wiederum alle zweiten den Sinus von u beinhaltenden herausgehen werden und die folgenden zurückbleiben werden

$$\int \frac{dz}{1+z} \log z = -\frac{\pi\pi}{12} = -\frac{1}{2}\alpha\pi\pi,$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \cdot \frac{(\log z)^3}{6} = -\frac{7\pi^4}{720} = -\frac{7}{8}\beta\pi^4,$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \cdot \frac{(\log z)^5}{120} = -\frac{31}{32}\gamma\pi^6,$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \cdot \frac{(\log z)^7}{5040} = -\frac{127}{128}\delta\pi^8.$$

§48 Hier tritt das bemerkenswerte Phänomen auf, dass alle zweiten Werte, die wir hier weggelassen haben, auch für $u = \pi$ verschwinden; des Weiteren ist es nicht weniger bemerkenswert, dass die selben Formeln auch für $u = 2\pi$ verschwinden, allein die erste ausgenommen, welche natürlich auch für $u = 0$ nicht verschwindet; die übrigen hingegen, natürlich die dritte, die fünfte, die siebte etc., verschwinden in den Fällen $u = 0$ und $u = \pi$, ja sogar $u = 2\pi$. Damit dies klarer wird, wollen wir diese Formeln als Produkt darstellen und der Wert der dritten wird

$$= \frac{1}{12}u(\pi - u)(2\pi - u)$$

sein, der Wert der fünften wird hingegen als

$$\frac{u}{720}(\pi - u)(2\pi - u)(4\pi\pi + 6\pi u - 3uu)$$

gefunden, was auch in den folgenden passiert. Es verdient aber im Allgemeinen bemerkt zu werden, dass alle unseren Formeln außer der ersten dieselben Werte annehmen, ob $u = 0$ oder $u = 2\pi$ gesetzt wird, welchen so derselbe Sinus wie Kosinus entspricht. Dieselbe Übereinstimmung scheint freilich bestehen zu müssen, wenn $u = 4\pi$ und $u = 6\pi$ gesetzt wird; aber der illustre BERNOULLI hat schon in vortrefflicher Weise gezeigt, dass der Winkel u in diesen Werten nicht über vier rechte hinaus vermehrt werden kann. Eine Anomalie von dieser Art tritt aber auch bei gewöhnlichen Reihen auf, mit denen Bogen ausgedrückt werden, und sogar in der LEIBNIZ'schen Reihe, in welcher

$$u = \frac{\tan u}{1} - \frac{(\tan u)^3}{3} + \frac{(\tan u)^5}{5} - \frac{(\tan u)^7}{7} + \frac{(\tan u)^9}{9} - \text{etc.}$$

ist, lässt sich der Winkel u nicht über $180°$ vermehren. Wenn wir nämlich $u = 180° + u$ setzen würden, wäre natürlich $\tan u = \tan u$ und denen würde jene Reihe nicht den Bogen $u + \pi$ ausdrücken, sondern nur den Bogen u, Phänomene von welcher Art auch in anderen ähnlichen Reihen auftreten. Dass aber die erste Reihe davon meistens ausgenommen werden muss, ist darin begründet, dass in der Integralformel für $u = 0$ der Nenner $1 - z$ wird, welcher im Fall $z = 1$ verschwindet, und daher die Formel ins Unendliche wächst, was in den folgenden, welche mit $\log z$ multipliziert sind, nicht weiter passiert, weil $\frac{\log z}{1-z}$ im Fall $z = 1$ nicht weiter unendlich wird, sondern nur $= -1$, und wenn eine höhere Potenz des Logarithmus da ist, wird der Ausdruck sogar $= 0$.

§49 Wir wollen nun auch $u = 90°$ oder $u = \frac{\pi}{2}$ setzen, dass $\cos u = 0$ und $\sin u = 1$ ist, und in diesem Fall werden alle allgemeinen Formeln die folgenden Werte erhalten

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int \frac{zdz}{1+zz} \log z = -\frac{\pi\pi}{48},$$

$$\int \frac{dz}{1+zz} \cdot \frac{(\log z)^2}{2} = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\int \frac{zdz}{1+zz} \cdot \frac{(\log z)^3}{6} = -\frac{7\pi^4}{90 \cdot 128}.$$

§50 Wir wollen auch den Fall $u = 60°$ oder $u = \frac{\pi}{3}$ betrachten, dass $\cos u = \frac{1}{2}$ und $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, und die allgemeinen Formeln werden zu den folgenden Integralen führen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1-z+zz}=\frac{\pi}{3},$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz(1-2z)}{1-z+zz}\log z=\frac{\pi\pi}{36},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1-z+zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{2}=\frac{5\pi^3}{162}.$$

Wenn wir in gleicher Weise $u=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ setzen, dass $\cos u=-\frac{1}{2}$ und $\sin u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, werden die folgenden jenen ähnliche Integrationen hervorgehen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1+z+zz}=\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dz(1+2z)}{1+z+zz}\log z=-\frac{\pi\pi}{18},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1+z+zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{2}=\frac{2\pi^3}{81};$$

und so wird die Anzahl an speziellen Integrationen von dieser Art nach Belieben vermehrt werden können.

§51 Wie diese merkwürdigen Integrationen aus unserer ersten Reihe P für $z=1$ abgeleitet worden sind, so wollen wir in derselben Weise die andere Reihe Q behandeln. Weil also

$$Q=\sin u+\sin 2u+\sin 3u+\sin 4u+\text{etc.}=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u$$

ist, findet man, wenn wir mit $-du$ multiplizieren und integrieren, die Reihe

$$P'=\frac{\cos u}{1}+\frac{\cos 2u}{2}+\frac{\cos 3u}{3}+\frac{\cos 4u}{4}+\text{etc.}=-\log\sin\frac{1}{2}u+A,$$

für die Bestimmung welcher Konstante man $u=\pi$ setze, dass

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\text{etc.}=A$$

ist, weshalb $A=-\log 2$ ist, so dass wir

$$P' = \frac{\cos u}{1} + \frac{\cos 2u}{2} + \frac{\cos 3u}{3} + \frac{\cos 4u}{4} + \text{etc.} = -\log 2 \sin \frac{1}{2}u$$

haben, für welchen Wert wir der Kürze wegen $\Delta : u$ setzen, weil wir ihn als gewisse Funktion von u ansehen, sodass $P' = \Delta : u$ ist.

§52 Indem wir weiter mit du multiplizieren und integrieren, erhalten wir diese Reihe

$$Q'' = \frac{\sin u}{1^2} + \frac{\sin 2u}{2^2} + \frac{\sin 3u}{3^2} + \frac{\sin 4u}{4^2} + \text{etc.} = \int du \Delta : u = \Delta' : u,$$

wo diese Integralformel eine gewisse Konstante beinhalten wird, die sich leicht aus dem Fall $u = 0$ bestimmen lassen wird; weil die Reihe nämlich verschwindet, muss $\Delta' : 0 = 0$ werden und so ist die Integration vollständig bestimmt.

§53 Wenn wir in gleicher Weise weiter fortschreiten, indem wir mit $-du$ multiplizieren, wird diese Reihe hervorgehen

$$P''' = \frac{\cos u}{1^3} + \frac{\cos 2u}{2^3} + \frac{\cos 3u}{3^3} + \frac{\cos 4u}{4^3} + \text{etc.} = -\int du \Delta' : u = \Delta'' : u.$$

Um nun die Konstante, die in in diesem Ausdruck enthalten ist, zu bestimmen, sei
I.) $u = 0$ und es wird gelten

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.} = \Delta'' : 0;$$

II.) sei $u = \pi$ und es wird

$$-\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \text{etc.} = \Delta'' : \pi$$

werden, nach Addieren von welchen

$$\frac{2}{2^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{6^3} + \frac{2}{8^3} + \text{etc.} = \Delta'' : 0 + \Delta'' \pi$$

hervorgeht, und ein Viertel dieser Summe wird

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}=4\Delta'':0+4\Delta'':\pi=\Delta'':0$$

sein, woher $3\Delta'' : 0 + 4\Delta'' : \pi = 0$ entspringt, aus welcher die in unsere Integralformel $\Delta'' : u = -\int du\Delta' : u$ eingehende Konstante bestimmt werden muss.

§54 Wir wollen erneut mit du multiplizieren und integrieren und es wird

$$Q^{\mathrm{IV}}=\frac{\sin u}{1^4}+\frac{\sin 2u}{2^4}+\frac{\sin 3u}{3^4}+\frac{\sin 4u}{4^4}+\text{etc.}=\int du\Delta'':u=\Delta''':u$$

hervorgehen und diese Funktion $\Delta''' : u$ muss so bestimmt werden, dass sie für $u = 0$ genommen verschwindet oder dass $\Delta''' : 0 = 0$ ist. Indem wir auf dieselbe Weise weiter vorgehen, wird

$$P^{\mathrm{V}}=\frac{\cos u}{1^5}+\frac{\cos 2u}{2^5}+\frac{\cos 3u}{3^5}+\frac{\cos 4u}{4^5}+\text{etc.}=-\int du\Delta''':u=\Delta^{\mathrm{IV}}:u$$

werden und die Natur dieser Funktion wird auf die folgende Weise bestimmt werden. Man setze natürlich wie bisher $u = 0$ und $u = \pi$ und es wird

$$\frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\text{etc.}=\Delta^{\mathrm{IV}}:0$$

und

$$-\frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}-\frac{1}{5^5}+\text{etc.}=\Delta^{\mathrm{IV}}:\pi$$

sein, und daher durch Addieren

$$\frac{2}{2^5}+\frac{2}{4^5}+\frac{2}{6^5}+\frac{2}{8^5}+\text{etc.}=\Delta^{\mathrm{IV}}:0+\Delta^{\mathrm{IV}}:\pi$$

und Multiplizieren mit 16

$$\frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\text{etc.}=16\Delta^{\mathrm{IV}}:0+16\Delta^{\mathrm{IV}}:\pi=\Delta^{\mathrm{IV}}:0$$

und so wird $15\Delta^{\mathrm{IV}} : 0 + 16\Delta^{\mathrm{IV}}\pi = 0$ etc. werden müssen.

§55 Daher werden wir also die folgenden Integrationen für den Fall $z = 1$ erhalten

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz} = -\log 2\sin\frac{1}{2}u = \Delta : u,\\
&\text{II.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}\log z = \int du\Delta : u = \Delta' : u,\\
&\text{III.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}\cdot\frac{(\log z)^2}{2} = -\int du\Delta' : u = \Delta'' : u,\\
&\text{IV.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}\cdot\frac{(\log z)^3}{6} = \int du\Delta'' : u = \Delta''' : u,\\
&\text{V.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}\cdot\frac{(\log z)^4}{24} = -\int du\Delta''' : u = \Delta^{\mathrm{IV}} : u,\\
&\text{VI.} \quad -\int \frac{dz(\cos u - z)}{1 - 2z\cos u + zz}\cdot\frac{(\log z)^5}{120} = \int du\Delta^{\mathrm{IV}} : u = \Delta^{\mathrm{V}} : u,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke lassen sich aber leicht beliebig weit fortsetzen, wenn nur die Integration jedes Integrals richtig durchgeführt wird; aber die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, können auf die folgende Weise dargestellt werden.

$$\begin{array}{r|rr}
\Delta' : 0 = 0 & 3\Delta'' : 0 + & 4\Delta'' : \pi = 0\\
\Delta''' : 0 = 0 & 15\Delta^{\mathrm{IV}} : 0 + & 16\Delta^{\mathrm{IV}} : \pi = 0\\
\Delta^{\mathrm{V}} : 0 = 0 & 63\Delta^{\mathrm{VI}} : 0 + & 64\Delta^{\mathrm{VI}} : \pi = 0\\
\Delta^{\mathrm{VII}} : 0 = 0 & 255\Delta^{\mathrm{VIII}} : 0 + & 256\Delta^{\mathrm{VIII}} : \pi = 0\\
\text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Weil sich aber die letzten Integrationen nicht durchführen lassen, können wir daraus kaum etwas von Nutzen erwarten.

§56 Außerdem ist die Methode, wie wir hier verwendet haben, um die durch Integration eingehenden Konstanten zu bestimmen, zuerst vom hoch geehrten Bernoulli gebraucht werden und ist umso größerer Aufmerksamkeit würdig anzusehen, weil mit ihrer Hilfe meine Summationen der Potenzen der Reziproken erhalten werden können, obleich ich geglaubt hatte, dass sie nur aus der Betrachtung unendlich vieler Bogen, die sich entweder demselben Sinus oder Kosinus erfreuen, gezeigt werden können.